

## Der reale Fall aus großen Höhen (bis 280km):

Erdbeschleunigung:

$$g_0 := 9.80665$$

$$g_{real}(h) := g_0 \cdot \left( \frac{6371000}{6371000 + h} \right)^2$$

Atmosphärendichte entsprechend der barometrischen Höhenformel:

$$\rho_{Tropo}(h) := 1.225 \cdot \exp\left(\frac{-h}{8.400}\right)$$

$$\rho_{Strato}(h) := 1.5 \cdot \exp\left(\frac{-h}{6.450}\right)$$

Zahl der Rechenschritte für Runge-Kutta-Verfahren, Anfangs- und Endzeit, Zeitintervall eines Schritts:

$$N := 40000$$

$$t_a := 0 \quad t_e := 350$$

$$int := \frac{t_e - t_a}{N} = 0.009$$

Tabellierte Werte der US-Standardatmosphäre für 0-50km Höhe (Dichte und Schallgeschwindigkeit):

1.225	340.29
1.1117	336.43
1.0066	332.53
0.90925	328.58
0.81935	324.59
0.73643	320.55
0.66011	316.45
0.59002	312.31
0.52579	308.11
0.46706	303.85
0.41351	299.53
0.3648	295.15
0.31194	295.07
0.2666	295.07
0.22786	295.07

	0.22180		295.07
	0.19476		295.07
	0.16647		295.07
	0.1423		295.07
	0.12165		295.07
	0.104		295.07
	0.08891		295.07
	0.075715		295.7
	0.06451		296.38
	0.055006		297.05
	0.04938		297.72
<i>density</i> :=	0.040084	<i>speed</i> :=	298.39
	0.034257		299.06
	0.029298		299.72
	0.025076		300.39
	0.021478		301.05
	0.01841		301.71
	0.015792		302.37
	0.013555		303.02
	0.011573		304.67
	0.0098874		306.49
	0.0084634		308.3
	0.0072579		310.1
	0.0062355		311.89
	0.0053666		313.67
	0.0046268		315.43
	0.0039957		317.19
	0.0034564		318.94
	0.0029948		320.67
	0.0025989		322.4
	0.0022589		324.12
	0.0019663		325.82
	0.0017142		327.52
	0.0014965		329.21
	0.0013167		329.8
	0.0011628		329.8
	0.0010269		329.8

ab 55 km bis 100 km:

$$density\_high := \begin{bmatrix} 0.0005681 \\ 0.00030968 \\ 0.00016321 \\ 0.000082829 \\ 0.000039921 \\ 0.000018458 \\ 0.000082196 \\ 0.000003416 \\ 0.000001393 \\ 0.0000005604 \end{bmatrix}$$

$$soundspeed\_high := \begin{bmatrix} 323.72 \\ 315.07 \\ 306.19 \\ 297.06 \\ 289.4 \\ 282.54 \\ 275.52 \end{bmatrix}$$

ab 110 km bis 300 km:

$$density\_veryhigh := \begin{bmatrix} 9.708 \cdot 10^{-8} \\ 2.222 \cdot 10^{-8} \\ 8.152 \cdot 10^{-9} \\ 3.831 \cdot 10^{-9} \\ 2.076 \cdot 10^{-9} \\ 1.233 \cdot 10^{-9} \\ 7.815 \cdot 10^{-10} \\ 5.194 \cdot 10^{-10} \\ 3.581 \cdot 10^{-10} \\ 2.541 \cdot 10^{-10} \\ 1.846 \cdot 10^{-10} \\ 1.367 \cdot 10^{-10} \\ 1.029 \cdot 10^{-10} \\ 7.858 \cdot 10^{-11} \\ 6.073 \cdot 10^{-11} \\ 4.742 \cdot 10^{-11} \\ 3.738 \cdot 10^{-11} \\ 2.971 \cdot 10^{-11} \\ 2.378 \cdot 10^{-11} \\ 1.916 \cdot 10^{-11} \end{bmatrix}$$

Interpolation der Daten für Luftdichte und Schallgeschwindigkeit:

$$i := 0 \dots \text{length}(\text{density}) - 1 \quad \text{height}_i := i$$

$$j := 0 \dots N$$

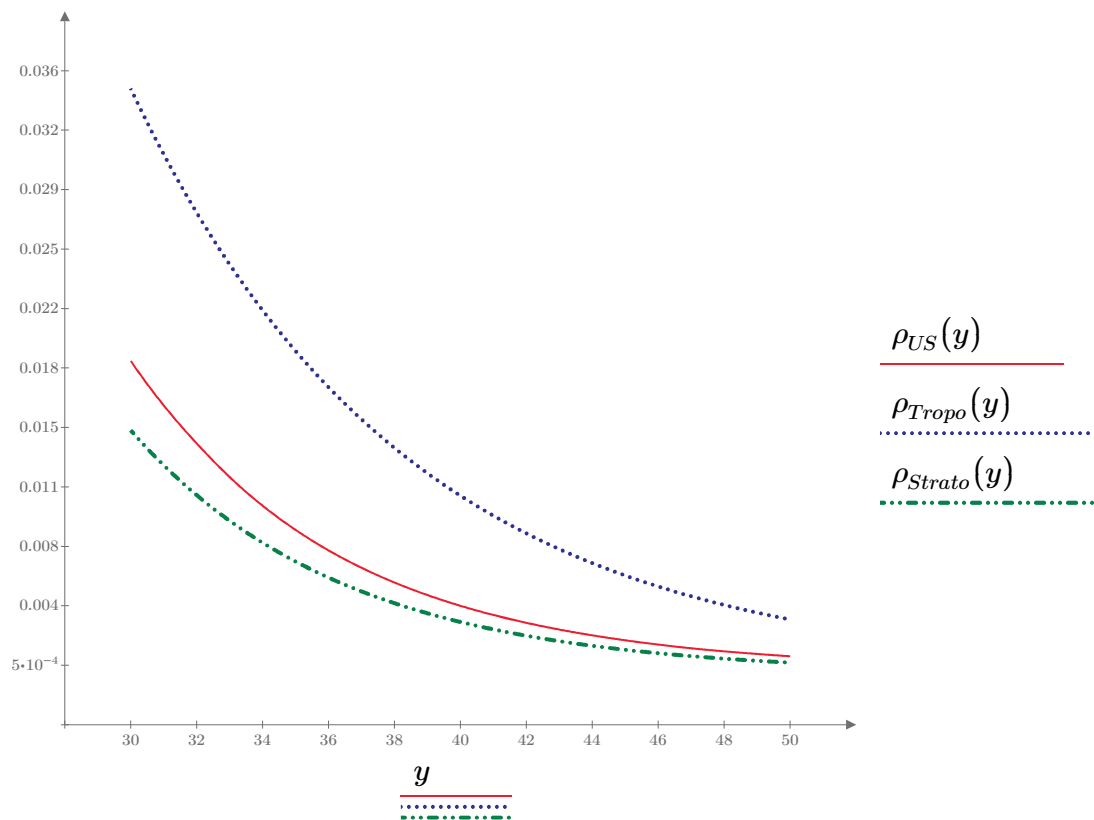
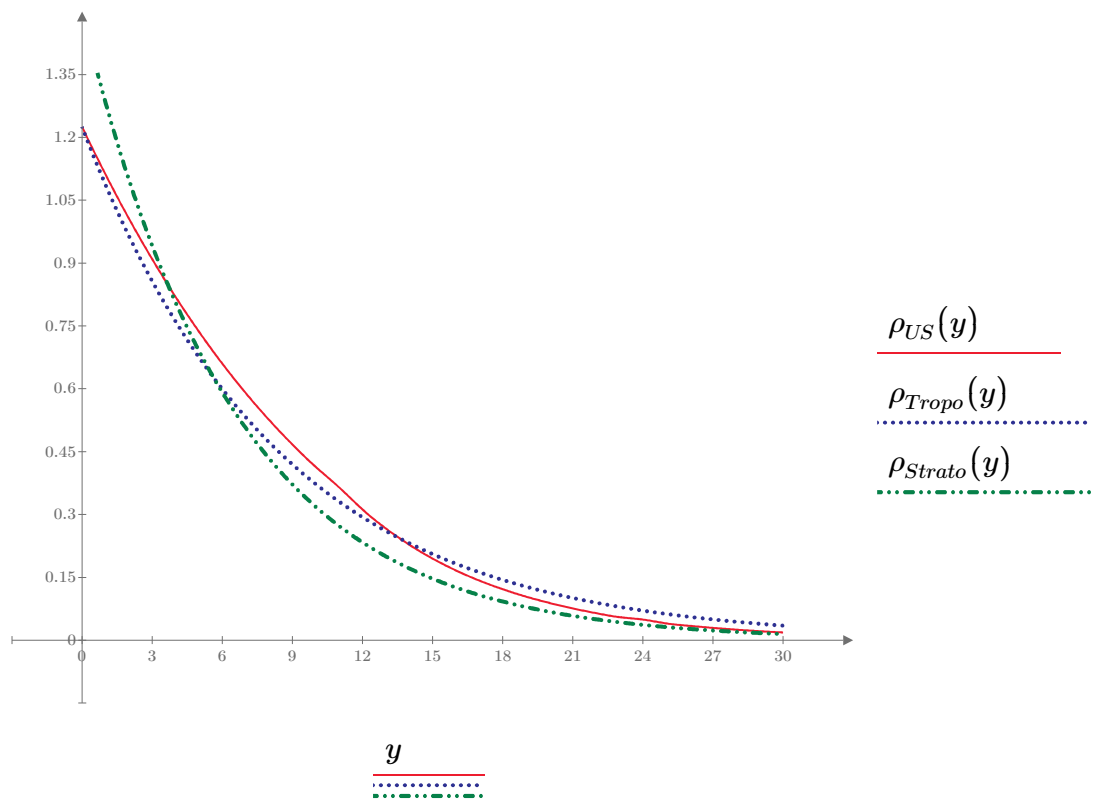
$$\rho_{interp} := \text{cspline}(\text{height}, \text{density})$$

$$\rho_{US}(h) := \text{interp}(\rho_{interp}, \text{height}, \text{density}, h)$$

$$C_{interp} := \text{cspline}(\text{height}, \text{soundspeed})$$

$$c_{US}(h) := \text{interp}\left(C_{interp}, \text{height}, \text{soundspeed}, \frac{h}{1000}\right)$$

Graphische Darstellung der beiden Luftdichtefunktionen als Funktion der Höhe (US Standard und barometrisch):



Interpolation der Daten für die Luftdichte bis zu 300km Höhe (variable Schrittweiten):

$$r := 0 \dots \text{length}(\text{density\_high}) - 1$$

$$\text{height\_high}_r := 50 + 5 \cdot r$$

$$\rho_{\text{high\_interp}} := \text{cspline}(\text{height\_high}, \text{density\_high})$$

$$\rho_{\text{US\_high}}(x) := \text{interp}(\rho_{\text{high\_interp}}, \text{height\_high}, \text{density\_high}, x)$$

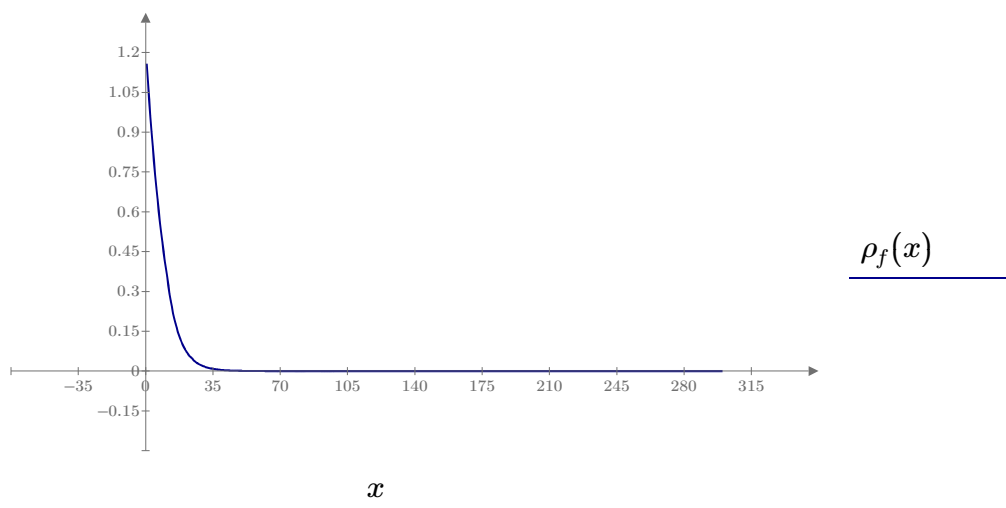
$$l := 0 \dots \text{length}(\text{density\_veryhigh}) - 1$$

$$\text{height\_veryhigh}_l := 100 + 10 \cdot l$$

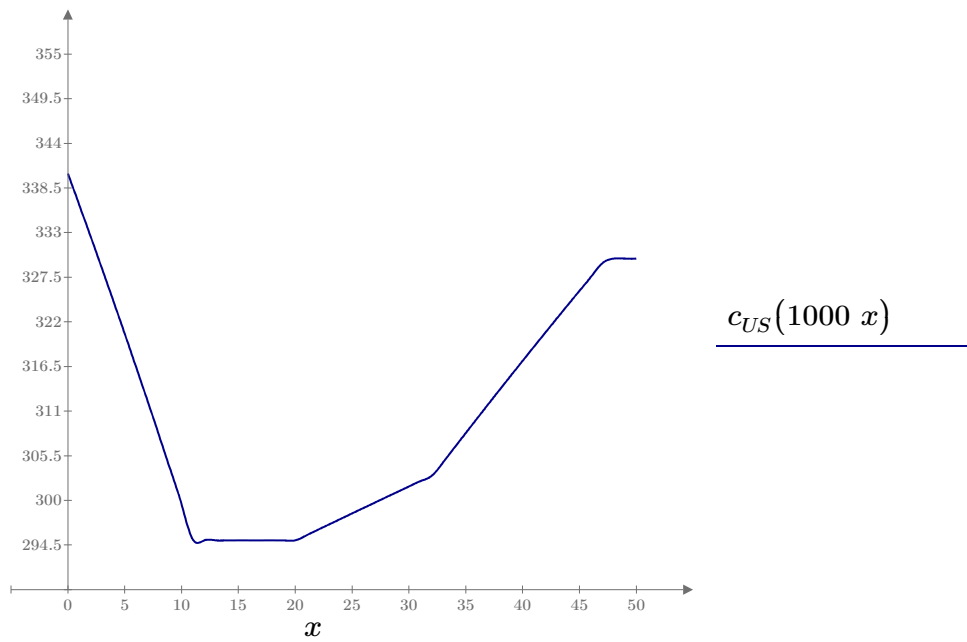
$$\rho_{\text{veryhigh\_interp}} := \text{cspline}(\text{height\_veryhigh}, \text{density\_veryhigh})$$

$$\rho_{\text{US\_veryhigh}}(x) := \text{interp}(\rho_{\text{veryhigh\_interp}}, \text{height\_veryhigh}, \text{density\_veryhigh}, x)$$

$$\rho_f(x) := \left\| \begin{array}{l} \text{if } 0 \leq x \leq 52.5 \\ \quad \left\| \rho_{\text{US}}(x) \right\| \\ \text{if } 52.5 < x \leq 97.5 \\ \quad \left\| \rho_{\text{US\_high}}(x) \right\| \\ \text{if } 97.5 \leq x \leq 300 \\ \quad \left\| \rho_{\text{US\_veryhigh}}(x) \right\| \end{array} \right\|$$

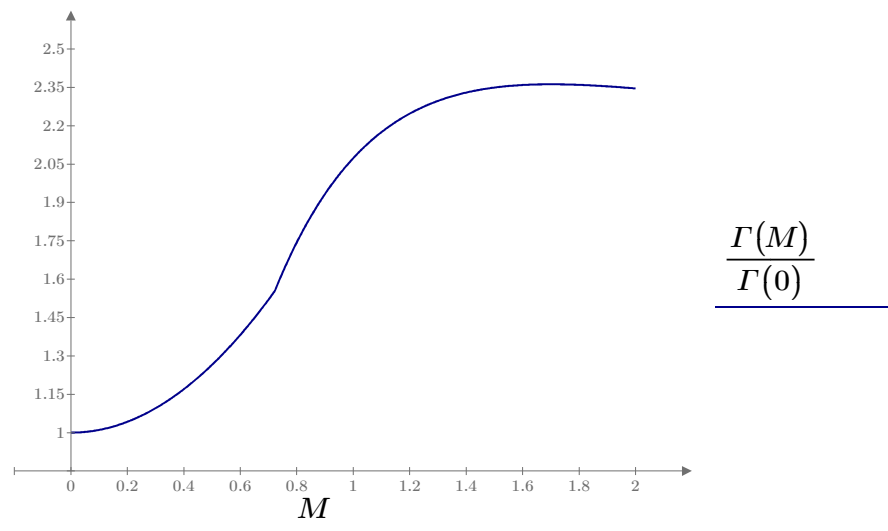


### Schallgeschwindigkeit als Funktion der Höhe:



### Erhöhung des Drag-Koeffizienten bei Überschreitung der Schallgeschwindigkeit:

$$\Gamma(m) := \text{if}(m \leq 0.722, 0.45\ m^2 + 0.424, 2.1 \cdot e^{-1.2 \cdot (m + 0.35)} - 8.9 \cdot e^{-2.2 \cdot (m + 0.35)} + 0.92)$$



Reale Daten vom Red Bull Stratos Experiment (Zeit, Höhe und Geschwindigkeit):

$$T := \begin{bmatrix} 34 \\ 50 \\ 64 \\ 180 \end{bmatrix} \quad S := \begin{bmatrix} 33446 \\ 27833 \\ 22960.7 \\ 7619.3 \end{bmatrix}$$

$$V := \begin{bmatrix} c_{US}(S_0) \\ 1357.6 \\ 3.6 \\ c_{US}(S_2) \\ 79.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 305.491 \\ 377.111 \\ 297.024 \\ 79.4 \end{bmatrix}$$

Lösung der Differentialgleichung und Kalibrierung des Strömungswiderstands:

Mit den US-Standardatmosphärenmodell:

$$TOL := 10^{-4} \quad init := \begin{bmatrix} 38969.4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_0 := \frac{g_{real}(S_1)}{\rho_{US}\left(\frac{S_1}{1000}\right) \cdot V_1^2} = 0.0026570708$$

$$D_{US}(t, Y) := \begin{bmatrix} Y_1 \\ -g_{real}(Y_0) + b_0 \cdot \rho_{US}\left(\frac{Y_0}{1000}\right) \cdot Y_1^2 \end{bmatrix}$$

$$Z_{US} := rkfixed(init, t_a, t_e, N, D_{US})$$

Mit dem Troposphärendichtemodell:

$$b_{Tropo} := \frac{g_{real}(S_1)}{\rho_{Tropo} \left( \frac{S_1}{1000} \right) \cdot V_1^2} = 0.0015334643$$

$$D_{Tropo}(t, Y) := \begin{bmatrix} Y_1 \\ -g_{real}(Y_0) + b_{Tropo} \cdot \rho_{Tropo} \left( \frac{Y_0}{1000} \right) \cdot Y_1^2 \end{bmatrix}$$

$$Z_{Tropo} := rkfixed(init, t_a, t_e, N, D_{Tropo})$$

Mit dem Stratosphärendichtemodell:

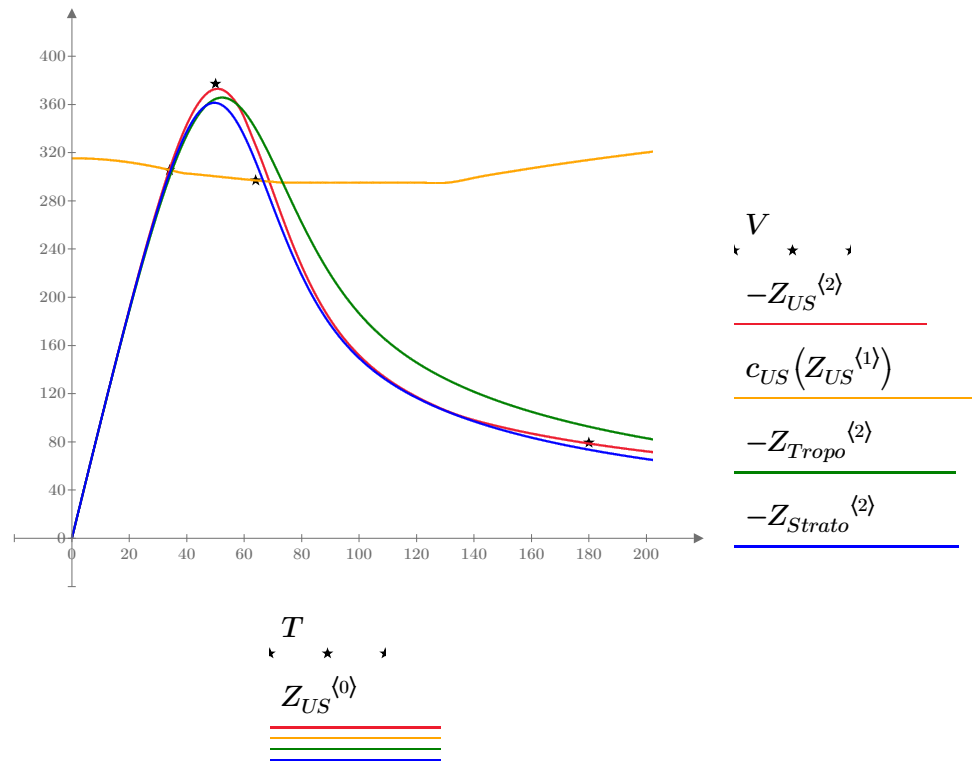
$$b_{Strato} := \frac{g_{real}(S_1)}{\rho_{Strato} \left( \frac{S_1}{1000} \right) \cdot \left( 40.51 \cdot e^{\frac{S_1}{12900}} \right)^2} = 0.003949286026$$

$$D_{Strato}(t, Y) := \begin{bmatrix} Y_1 \\ -g_{real}(Y_0) + b_{Strato} \cdot \rho_{Strato} \left( \frac{Y_0}{1000} \right) \cdot Y_1^2 \end{bmatrix}$$

$$Z_{Strato} := rkfixed(init, t_a, t_e, N, D_{Strato})$$



## Graphischer Vergleich - Lösungskurven:

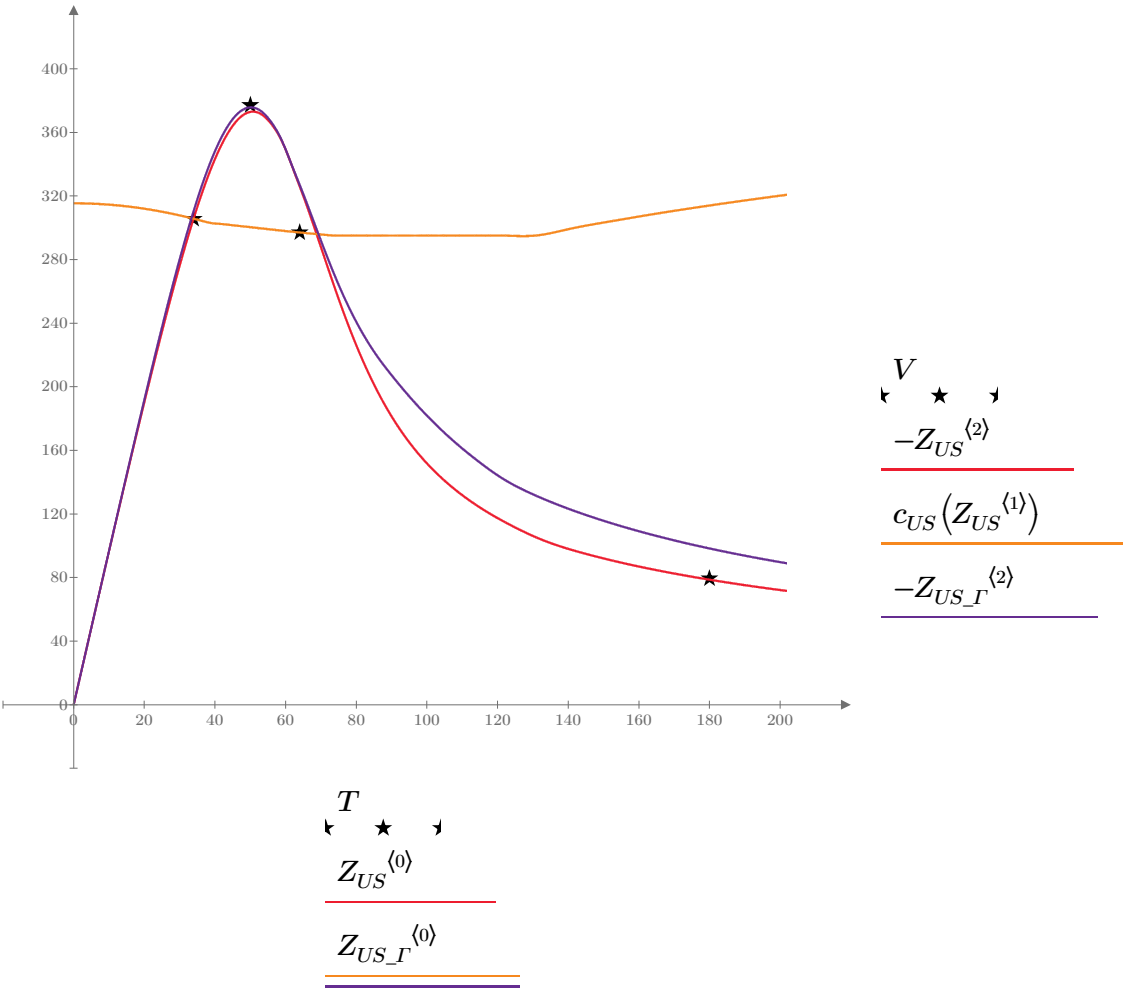


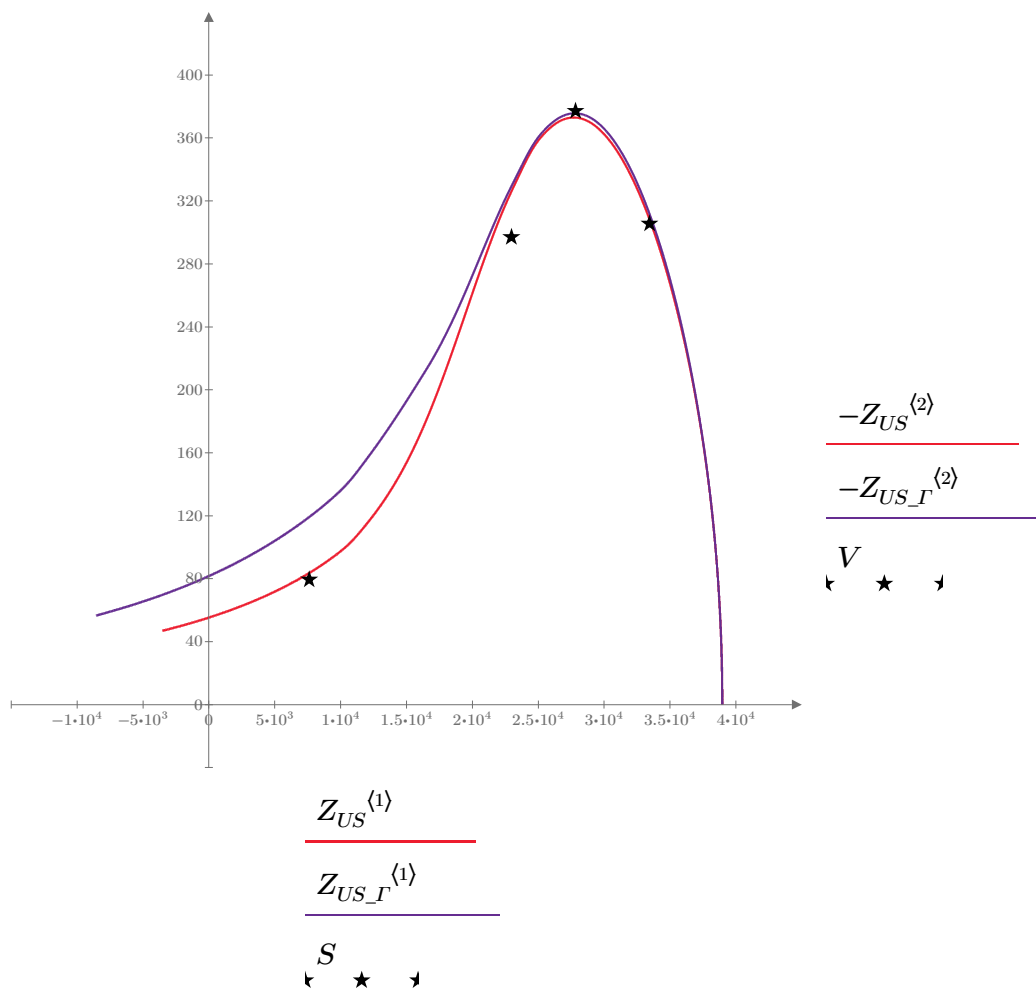
Mit Berücksichtigung der Überschallbarriere:

$$b_1 := \frac{g_{real}(S_1)}{\rho_{US}\left(\frac{S_1}{1000}\right) \cdot V_1^2 \cdot \Gamma\left(\frac{V_1}{c_{US}(S_1)}\right)} = 0.0027515613$$

$$b(x,y) := \Gamma\left(\frac{|y|}{c_{US}(x)}\right) \cdot b_1$$

$$D_{US_\Gamma}(t,Y) := \begin{bmatrix} Y_1 \\ -g_{real}(Y_0) + b(Y_0,Y_1) \cdot \rho_{US}\left(\frac{Y_0}{1000}\right) \cdot Y_1^2 \end{bmatrix}$$
$$Z_{US_\Gamma} := rkfixed(init,t_a,t_e,N,D_{US_\Gamma}) \qquad TOL := 10^{-20}$$





Mit Berücksichtigung einer während des Sprungs veränderlichen Angriffsfläche:

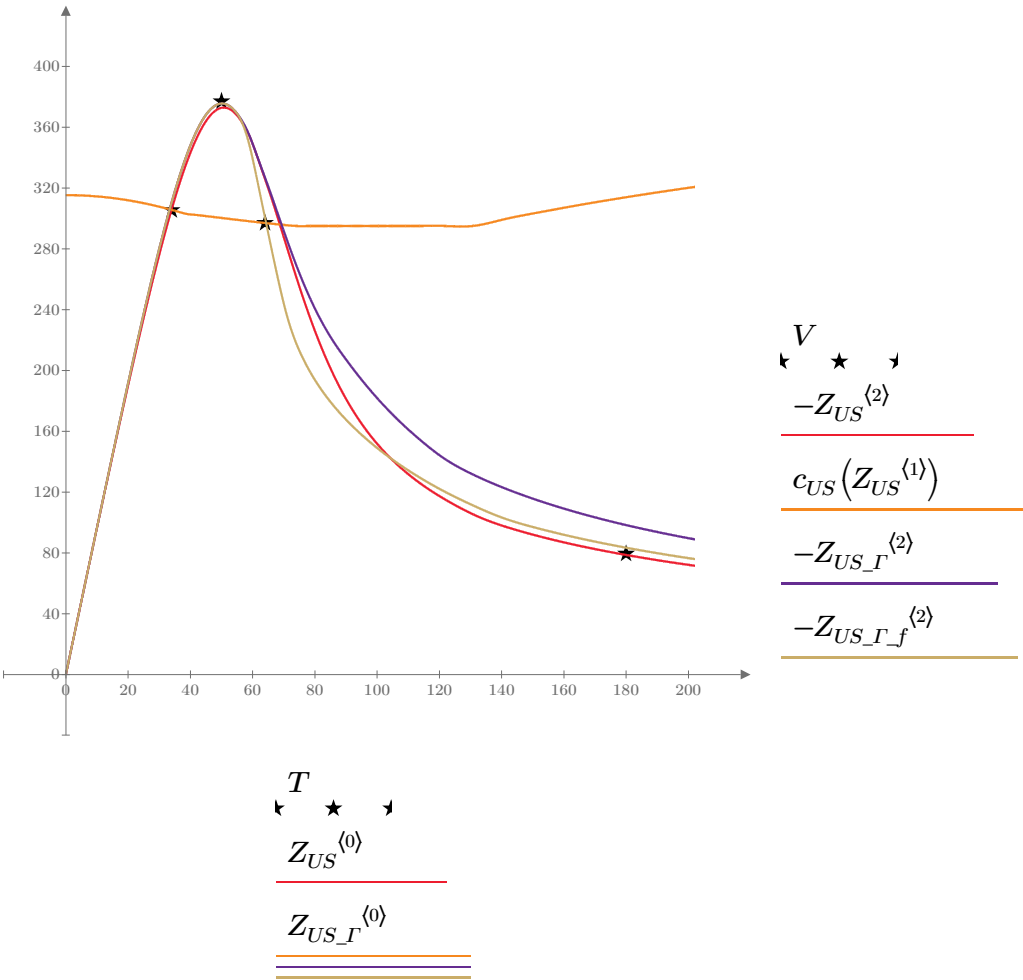
$$res(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } t \leq 55 \\ 1 + \frac{t-55}{15} & \text{if } 55 < t < 70 \\ 2 & \text{if } t \geq 70 \end{cases}$$

$$X := \begin{bmatrix} 59 \\ 64 \\ 77 \\ 82 \end{bmatrix} \quad Y := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

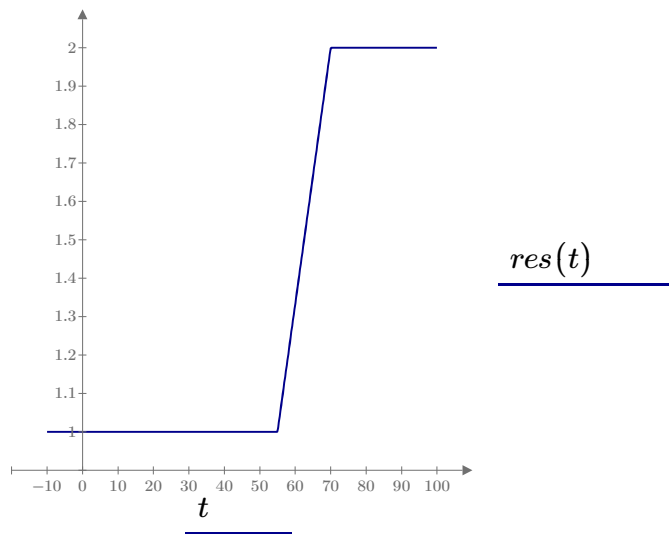
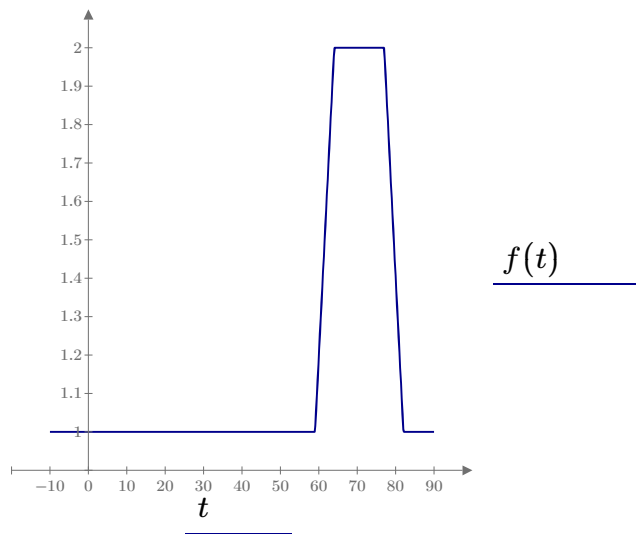
$$sp(t) := linterp(X, Y, t)$$

$$D_{US_{\Gamma_f}}(t,Y) \coloneqq \begin{bmatrix} Y_1 \\ -g_{real}(Y_0)+res(t) \; b(Y_0,Y_1) \cdot \rho_{US}\left(\frac{Y_0}{1000}\right) \cdot Y_1^2 \end{bmatrix}$$

$$Z_{US_{\Gamma_f}}\coloneqq rkfixed\left( init,t_a,t_e,N,D_{US_{\Gamma_f}}\right)$$



$$f(t) := if(59 \leq t \leq 82, sp(t), 1)$$



Sprünge aus noch größeren Höhen:

$$init1 := \begin{bmatrix} 40000 \\ 0 \end{bmatrix} \quad init2 := \begin{bmatrix} 42000 \\ 0 \end{bmatrix} \quad init3 := \begin{bmatrix} 44000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$init4 := \begin{bmatrix} 46000 \\ 0 \end{bmatrix} \quad init5 := \begin{bmatrix} 48000 \\ 0 \end{bmatrix} \quad init6 := \begin{bmatrix} 50000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$t_{start} := 0 \quad t_{end} := 300$$

$$D_{US\_higher}(t, Y) := \begin{bmatrix} Y_1 \\ -g_{real}(Y_0) + b(Y_0, Y_1) \cdot \rho_{US}(0.001 \cdot Y_0) \cdot Y_1^2 \end{bmatrix}$$

$$Z_0 := rkfixed(init, t_{start}, t_{end}, N, D_{US\_higher})$$

$$Z_1 := rkfixed(init1, t_{start}, t_{end}, N, D_{US\_higher})$$

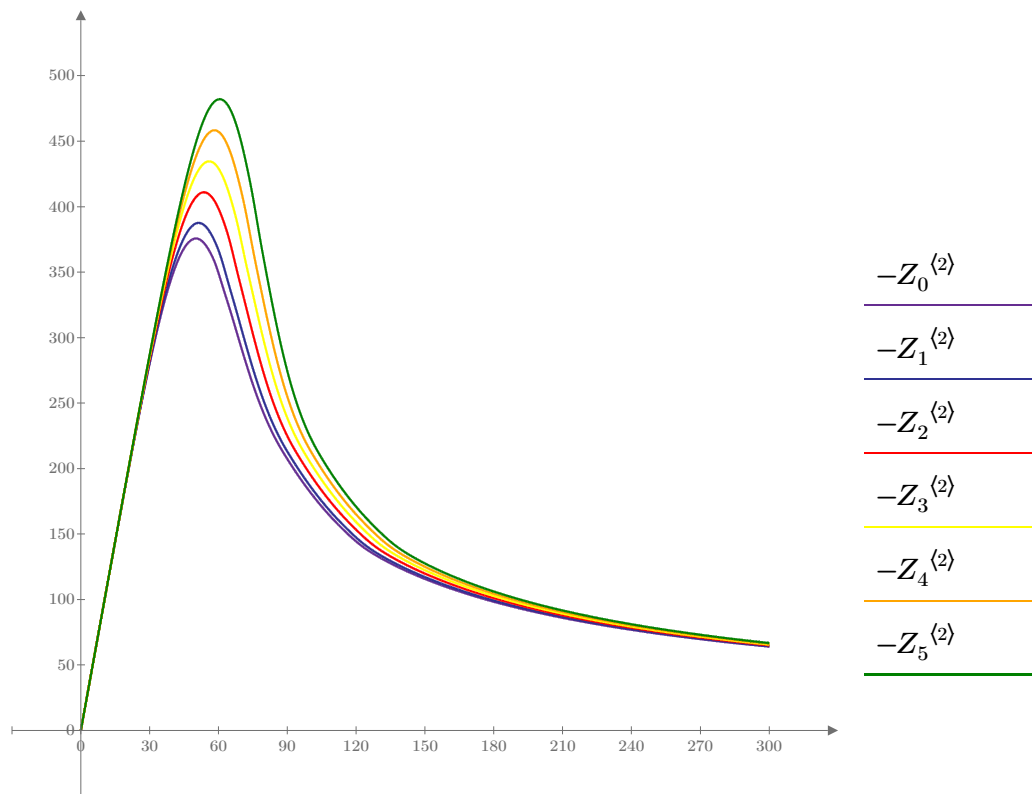
$$Z_2 := rkfixed(init2, t_{start}, t_{end}, N, D_{US\_higher})$$

$$Z_3 := rkfixed(init3, t_{start}, t_{end}, N, D_{US\_higher})$$

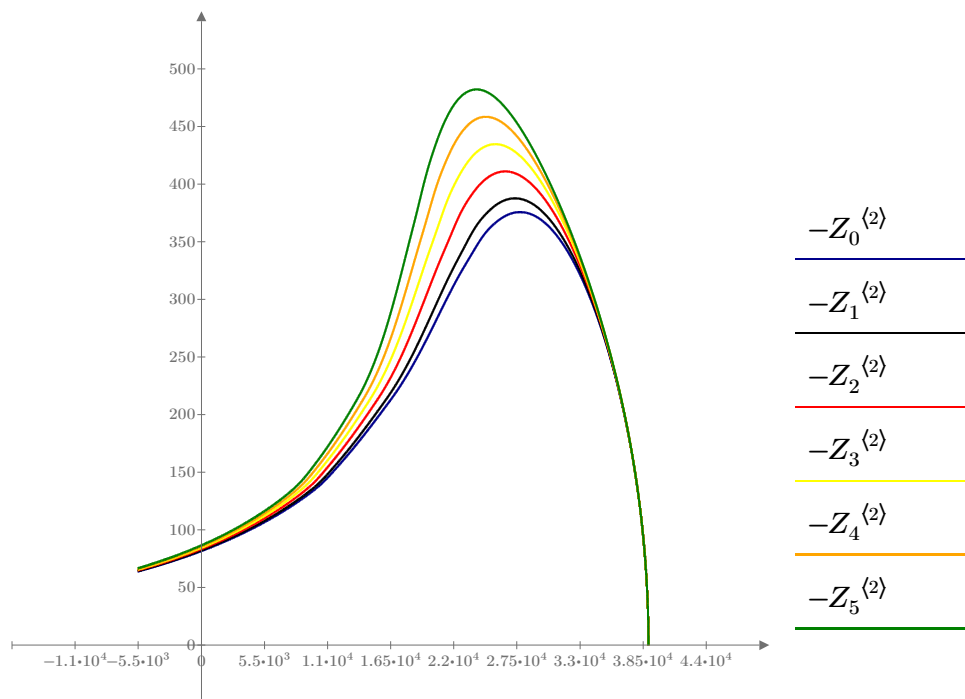
$$Z_4 := rkfixed(init4, t_{start}, t_{end}, N, D_{US\_higher})$$

$$Z_5 := rkfixed(init5, t_{start}, t_{end}, N, D_{US\_higher})$$

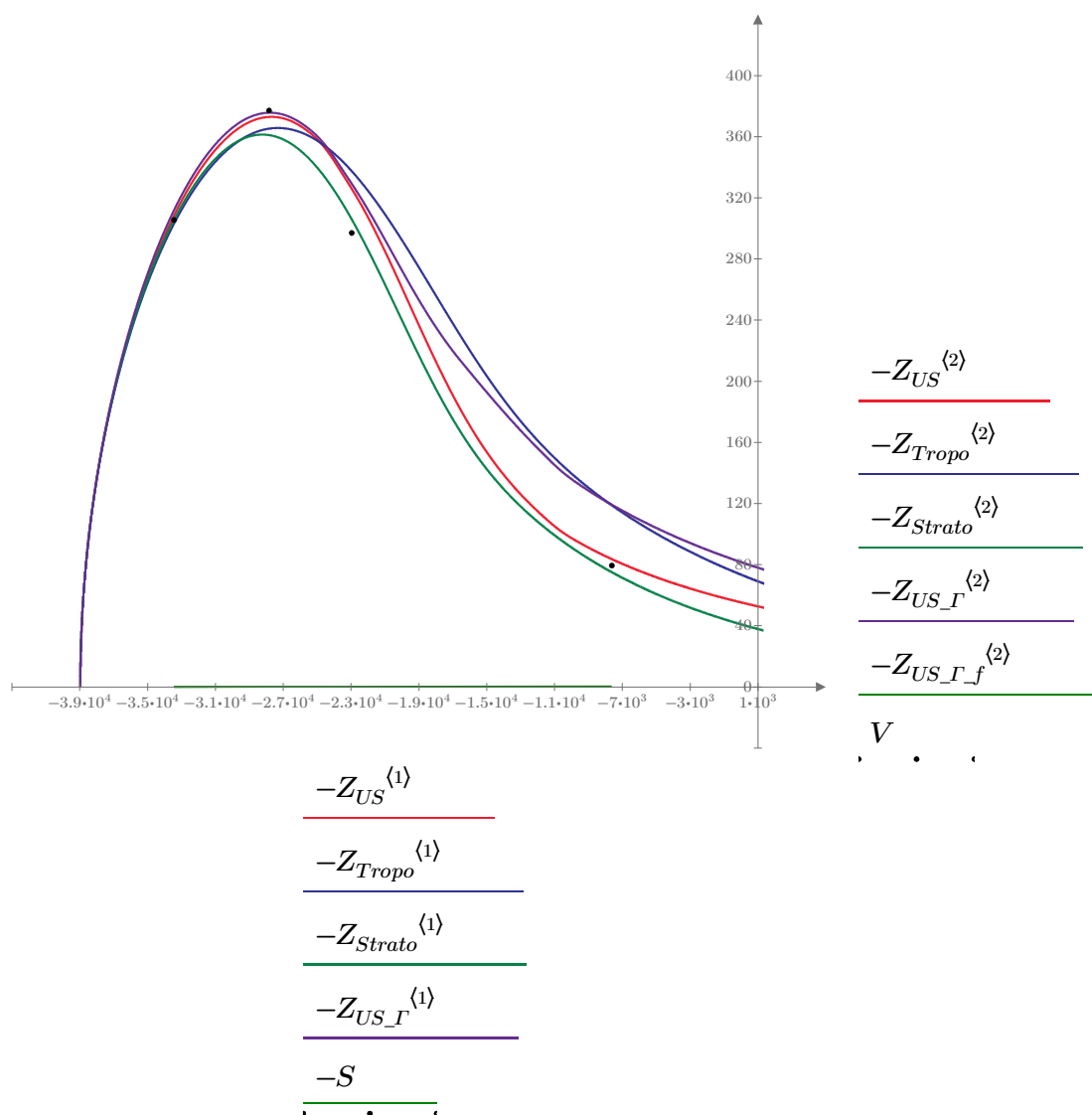
$$Z_6 := rkfixed(init6, t_{start}, t_{end}, N, D_{US\_higher})$$



$Z_0^{(0)}$   
 $Z_1^{(0)}$   
 $Z_2^{(0)}$   
 $Z_3^{(0)}$   
 $Z_4^{(0)}$   
 $Z_5^{(0)}$



$Z_0^{(1)}$   
 $Z_1^{(1)}$   
 $Z_2^{(1)}$   
 $Z_3^{(1)}$   
 $Z_4^{(1)}$   
 $Z_5^{(1)}$





$$D_{xy}(t,Y) := \begin{bmatrix} Y_1 \\ -g_0 - b\left(Y_0, \sqrt{Y_3^2 + Y_1^2}\right) \cdot \rho_{US}\left(0.001 \cdot Y_0\right) \cdot Y_1 \cdot \sqrt{Y_1^2 + Y_3^2} \\ Y_3 \\ -b\left(Y_0, \sqrt{Y_3^2 + Y_1^2}\right) \cdot \rho_{US}\left(0.001 \cdot Y_0\right) \cdot Y_3 \cdot \sqrt{Y_1^2 + Y_3^2} \end{bmatrix}$$

$$init_{xy} := \begin{bmatrix} 50000 \\ -10000 \\ 30000 \\ 150 \end{bmatrix}$$

$$Z_{xy} := rkfixed\left( init_{xy}, t_a, t_e, N, D_{xy} \right)$$